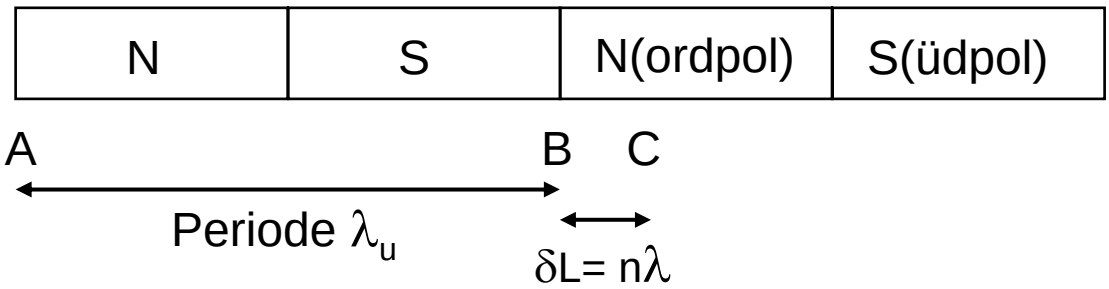
Vortrag 4
Varia

- Undulatoren
- ECR-Quelle für schwere Ionen
- Das Zyklotron als Speicherring ?
- Raumladungskräfte
- keine Angst vor Einstein Formeln !

Selektion der Wellenlänge im Undulator

Im Undulator findet ein Wettrennen zwischen dem Elektron (auf Slalomkurs) und einem emittierten Photon statt!



Elektron ➡ $v \equiv \beta c$

Photon ➡ c

Bei A emittiert ein Elektron ein Photon 1 mit Wellenlänge λ und fliegt mit Geschwindigkeit $v = \beta c$ weiter nach B. Dort emittiert es ein weiteres Photon 2 mit der gleichen Wellenlänge λ. Ist das Photon 1 in diesem Moment aber bereits bei C, d.h. n Wellenlängen weiter, so gibt es eine positive Interferenz zwischen Photon 1 und 2. Damit wird diese Wellenlänge verstärkt.

$$\delta L \equiv n\lambda \approx (1-\beta)\,\lambda_u\ , \quad 1-\beta \approx \frac{1}{2\gamma^2}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2n\gamma^2}\left(1+\frac{K^2}{2}\right) \qquad K = 0.0934\ \lambda_u[mm]\ B[T]$$

Umweg durch Slalom

Wellenlängenbereich λ von Undulatoren mit Periode λ_u

$$\lambda = \frac{\lambda^*}{\gamma^2} \qquad \lambda^* \equiv \frac{(1+\frac{1}{2}K^2)}{2n}\lambda_u$$

K = 0.093 λ_u[mm] B[T]

n = harmonische

Photonen-energie ε_γ : $\lambda\ \varepsilon_\gamma = 1.2$ nm keV

max. Brillanz für $\lambda^* \approx \lambda_u$ (n = 1, K ≈ 1.4)

min. λ für n ≈ 13, K ≈ 1.5

$\lambda^*_{min} \approx \lambda_u/12$

max. λ für n ≈ 1, K ≈ 7

$\lambda^*_{max} \approx 12*\lambda_u$

SLS: γ = 2.4GeV/0.5 MeV = 4‘800 :

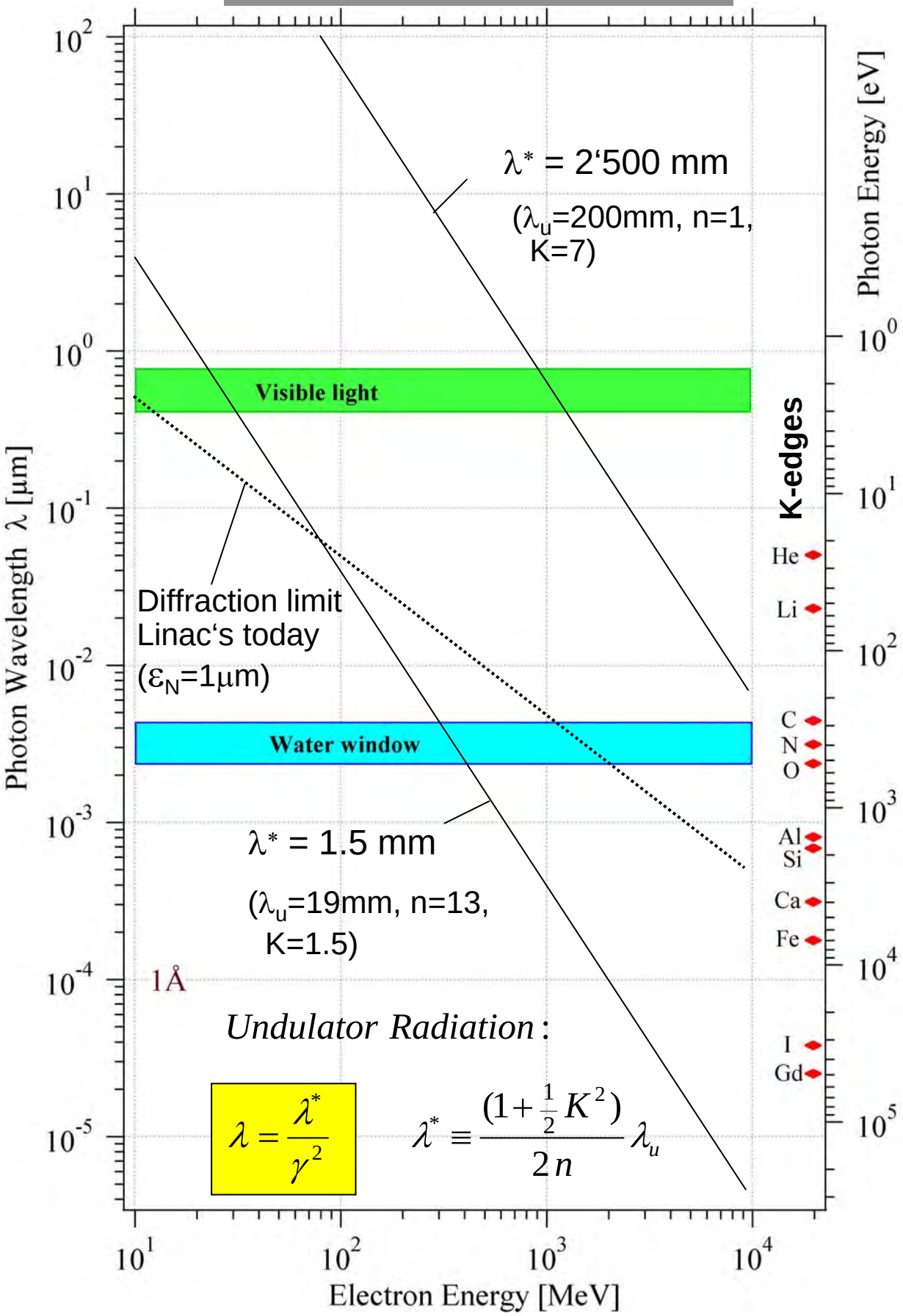
min. λ:

λ_u = 19 mm , λ^* = 1.6 mm, λ_{min} = 0.07 nm , ε_γ = 18 keV

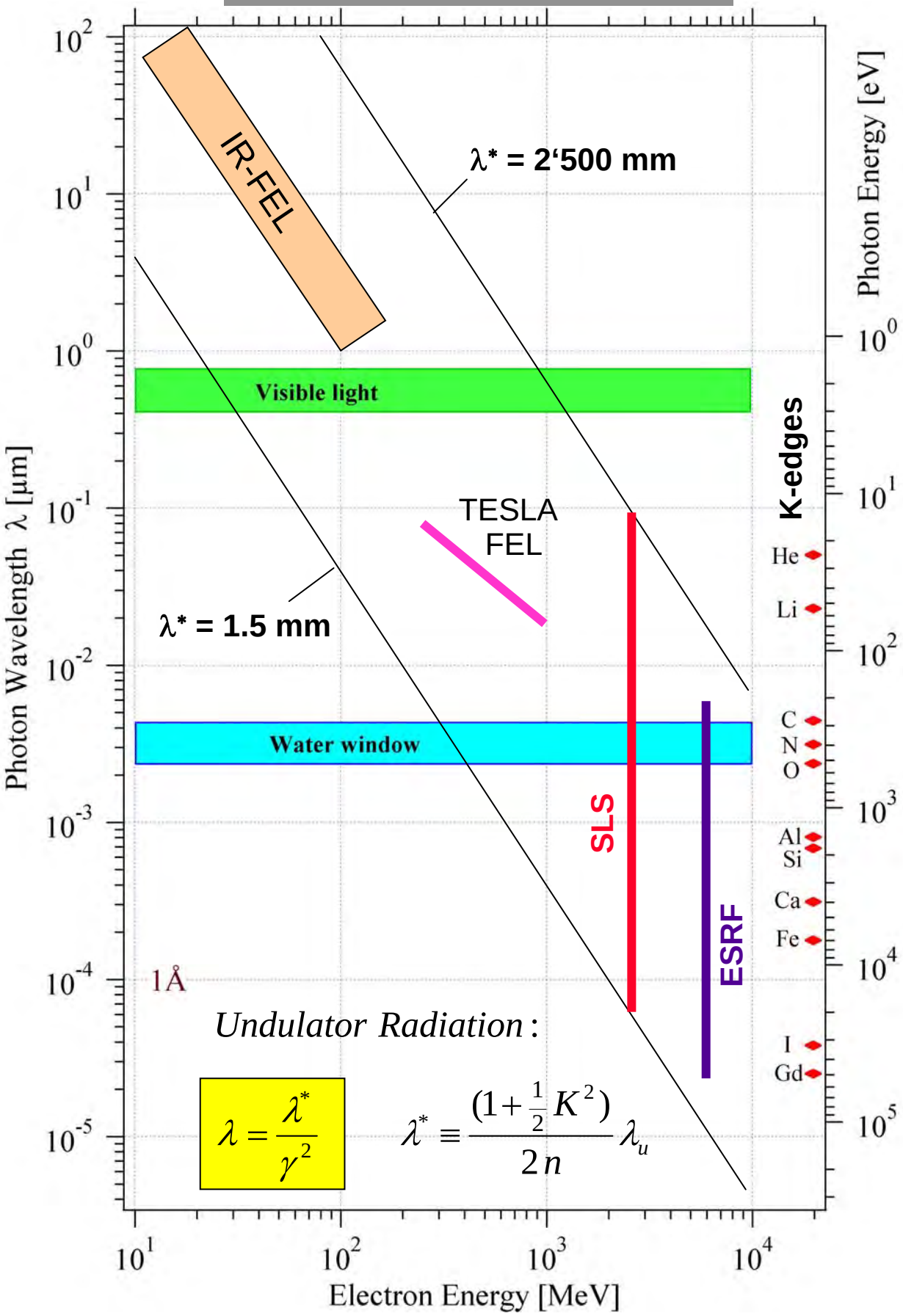
max. λ:

λ_u = 212 mm , λ^* = 2500 mm, λ_{max} = 110 nm , ε_γ = 11 eV

Universal Undulator Plot



Universal Undulator Plot

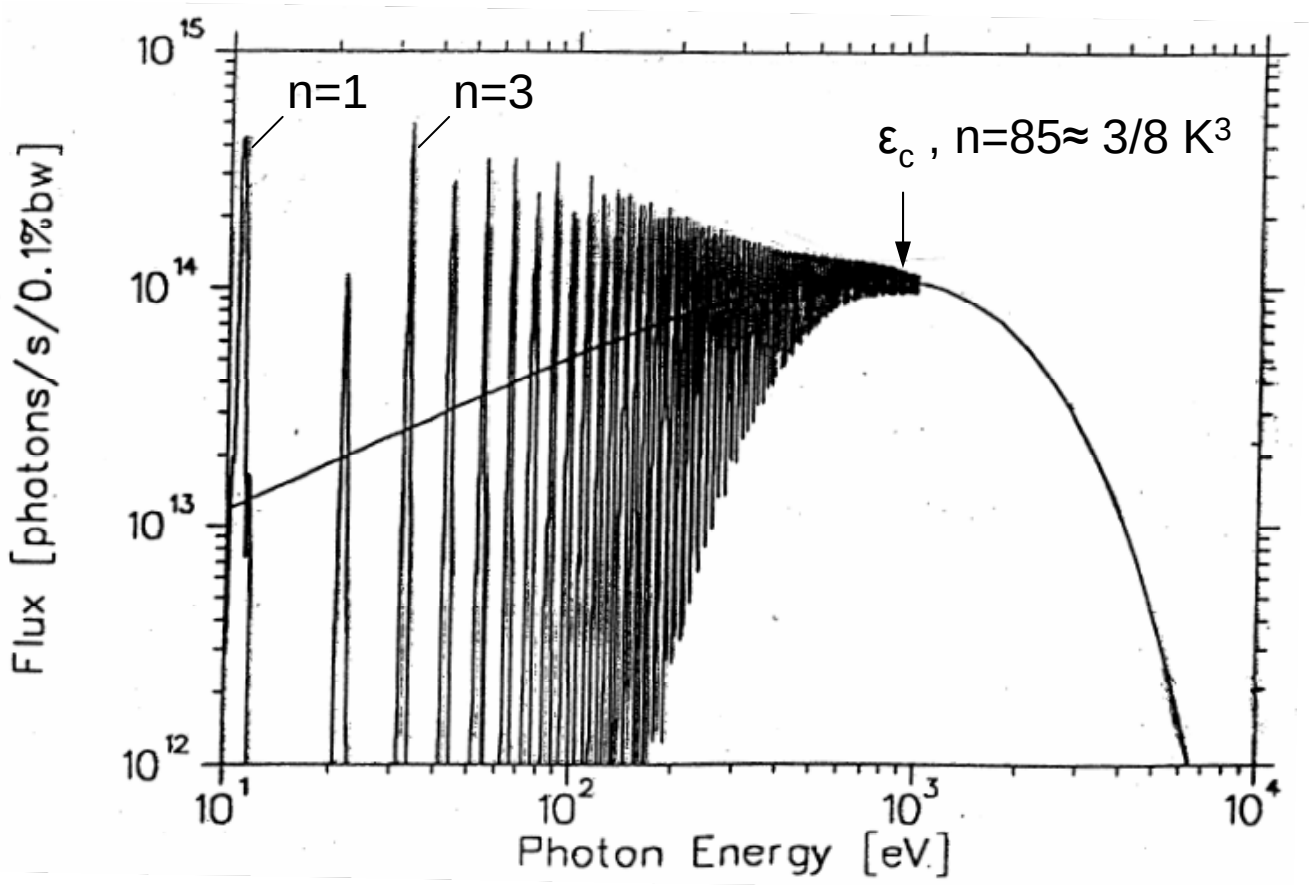


Wiggler/Undulator

Beispiel eines Undulators für tiefe Photonen-energien (≈10-100eV).
=> lange Periode λ_u (200 mm) und K=6

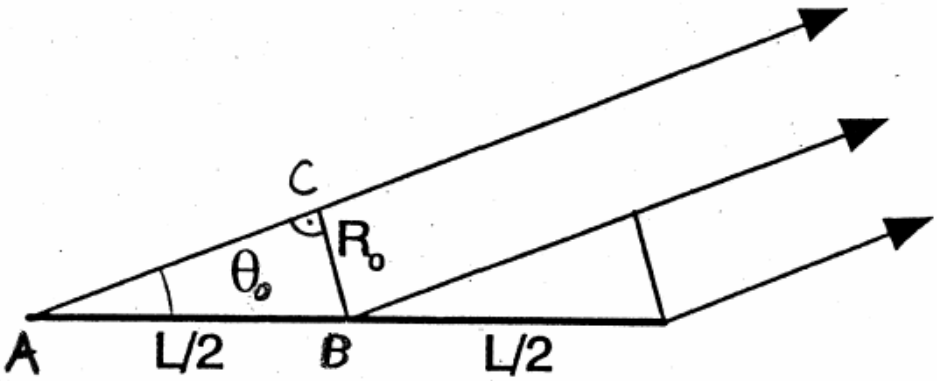
$K = 0.093\ \lambda_u\ [mm]\ B[T]$

Bei sehr hohen harmonischen n gibt es keine Interferenzen mehr; der Undulator wirkt wie ein Wiggler oder Ablenkmagnet.



Photonenfluss durch ein „pinhole“ (4mm Ø , 15m nach Undulator)
(Berechnung durch R.Walker für einen 2.1 GeV Speicherring).
Die kritische Energie $\varepsilon_c \approx 1$ keV entspricht einem Ablenkmagneten mit einem Feld B=0.32 T.

Abstrahlkegel eines Undulators



Ein Undulator strahlt auf seiner gesamten Länge L Photonen mit diskreten Wellenlängen λ in einen Vorwärtskegel ab.

Die Ausbreitung der Wellenfront BC wird bei einem Winkel θ_0 unterdrückt, falls die Weglänge AC gerade um eine halbe Wellenlänge kürzer ist, als der Weg AB (negative Interferenz).

$$dL = AB - AC = \tfrac{1}{2} L (1 - \cos\theta_0)$$

negative Interferenz bei $dL = \tfrac{1}{2}\lambda$;

daraus folgt für kleine Winkel (und Emittanz 0 des Elektronenstahls)

Winkelöffnung: $\theta_0 = \sqrt{\frac{2\lambda}{L}}, \qquad R' = \theta_{rms} = 0.6\sqrt{\frac{\lambda}{L}}$

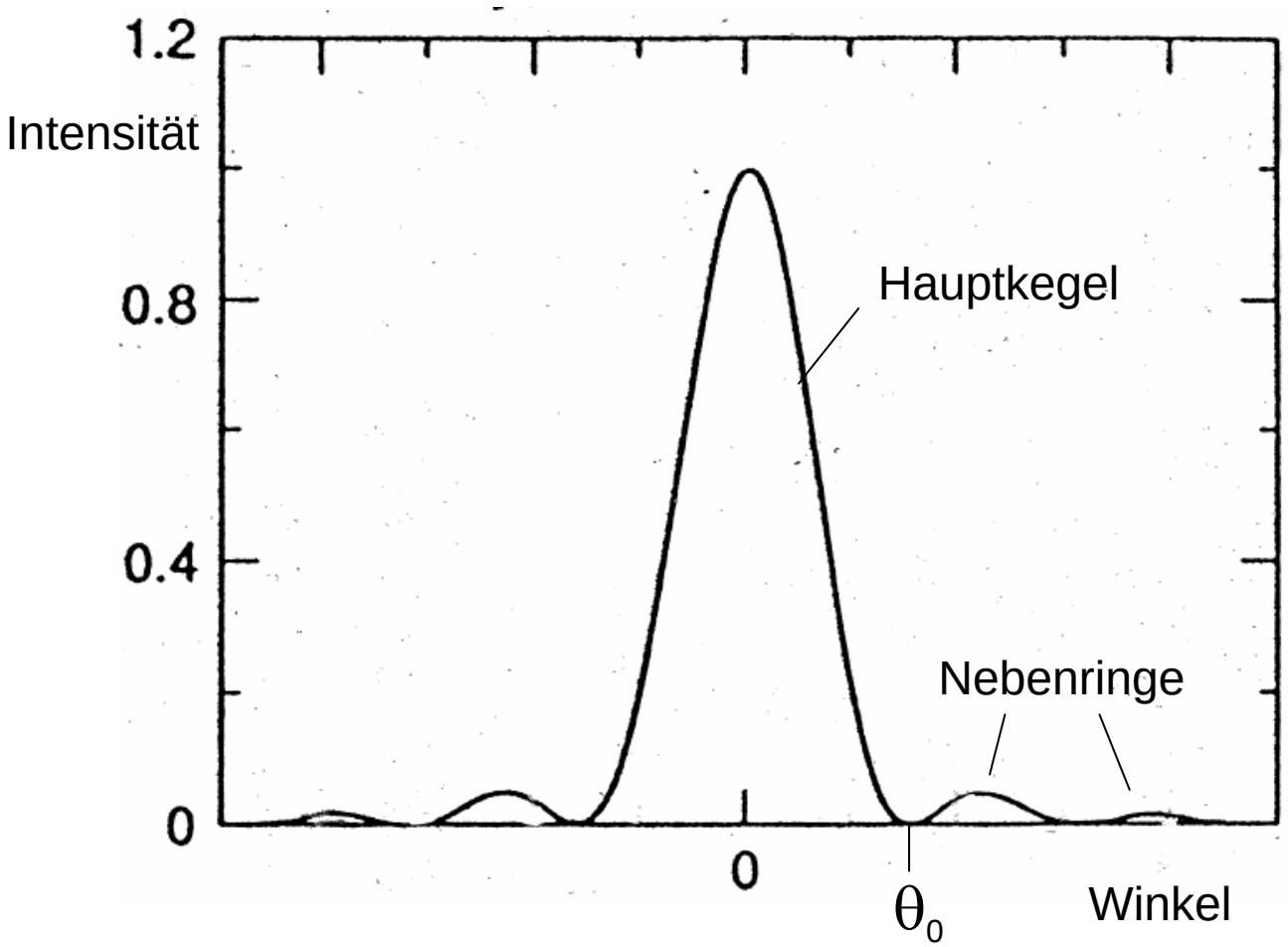
Quellengrösse: $R_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2}}, \qquad R = R_{rms} = 0.2\sqrt{\lambda L}$

Diffraktions-emittanz: $\varepsilon_0 = R_0\theta_0 = \lambda\,, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_{rms} = RR' = 0.12\lambda$

Raleigh-Länge: $\beta_0 = \frac{R_0}{\theta_0} = \frac{L}{2}\,, \quad \beta_r = \frac{R}{R'} = \frac{L}{3}$

Winkelverteilung der Undulatorstrahlung

Ein Undulator der Länge L strahlt Photonen von diskreten Wellenlängen λ stark gebündelt in Vorwärtsrichtung ab. Unter dem Winkel θ_0 verhindert eine negative Interferenz eine Abstrahlung. Neben einem Hauptkegel gibt es auch noch schwächere Nebenringe. Der Abstrahlkegel wird durch die Emittanz des Elektronenstrahls zusätzlich verbreitert.



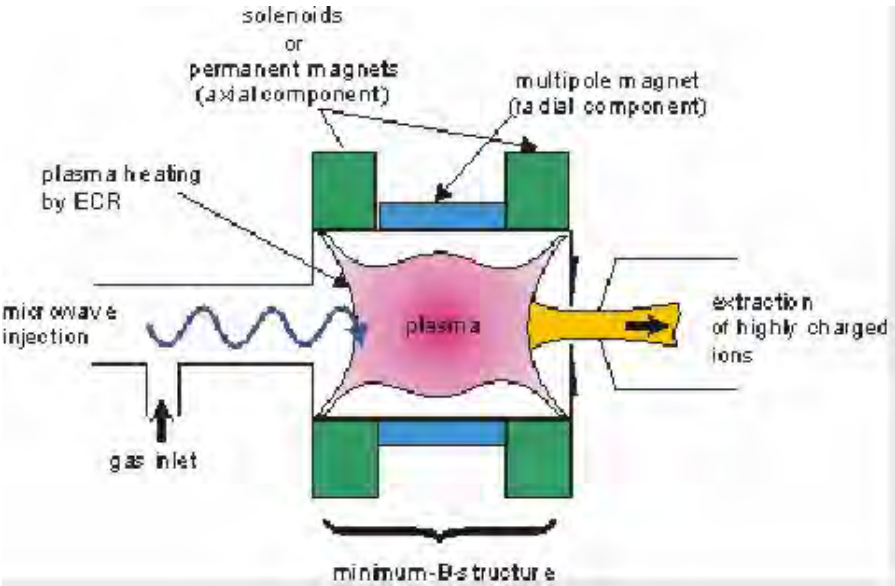
$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2\lambda}{L}}, \quad \text{(Diffraktionslimite)}$$

$$\theta_{rms} \approx 0.6\sqrt{\frac{\lambda}{L}}, \quad (= 50\,\mu\text{rad für } \lambda = 0.1\,\text{nm}, \text{L} = 1.5\,\text{m})$$

ECR Ionenquelle

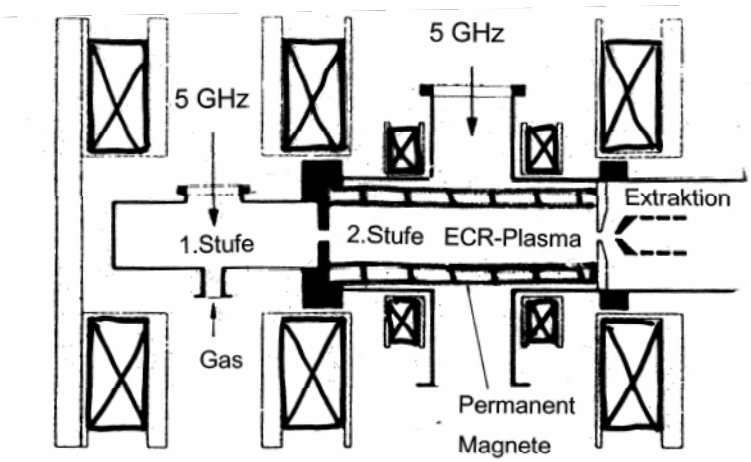
Ein Plasma wird in einer Magnetflasche eingeschlossen.

Durch die Beschleunigung von Elektronen mit Mikrowellen auf ihrer Zyklotronfrequenz erhöht sich die Ionisationsrate der Atome im Plasma. Es können sehr hohe Ladungszustände erreicht werden.

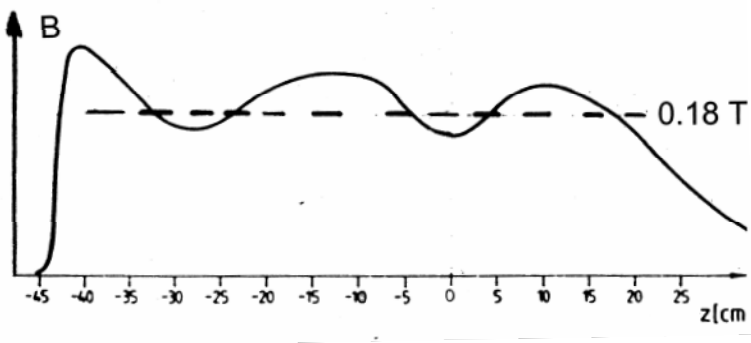


Schema einer ECR-Quelle

(Electron Cyclotron Resonance)



Beispiel einer ECR-Quelle für das Jülich Zyklotron



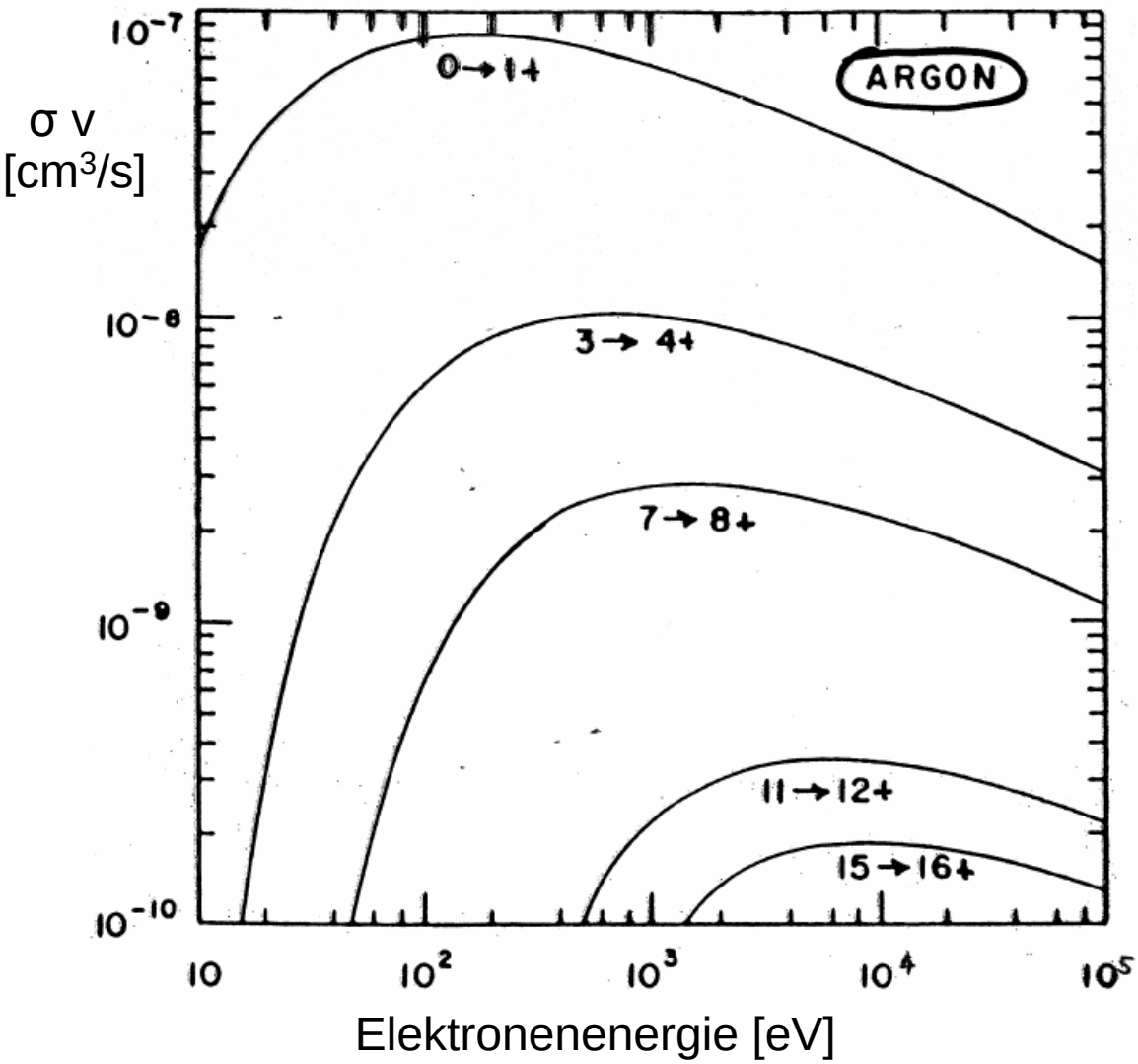
Ionisation eines Atoms

Ionizationsrate = (σ v) n

n = Elektronendichte => magnetische Flasche

σ = Wirkungsquerschnitt für Ionisation

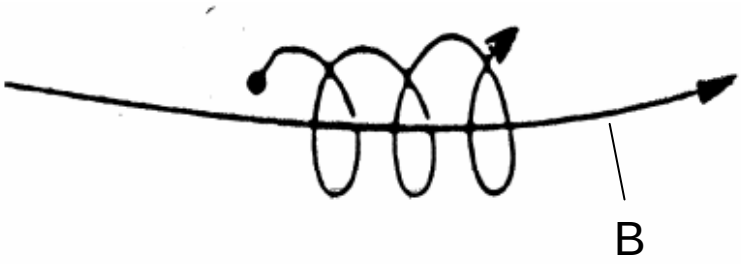
v = Geschwindigkeit der Ionen



hoher Ladungszustand braucht hohe Elektronen-energie

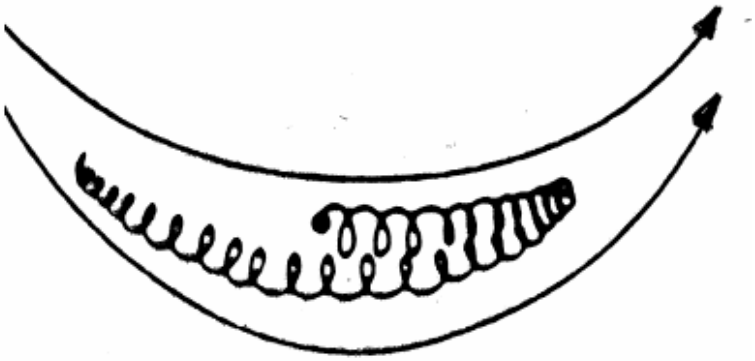
=> ECR-Quelle (Zyklotronresonanz mit Mikrowellen)

Magnetflasche für Plasma

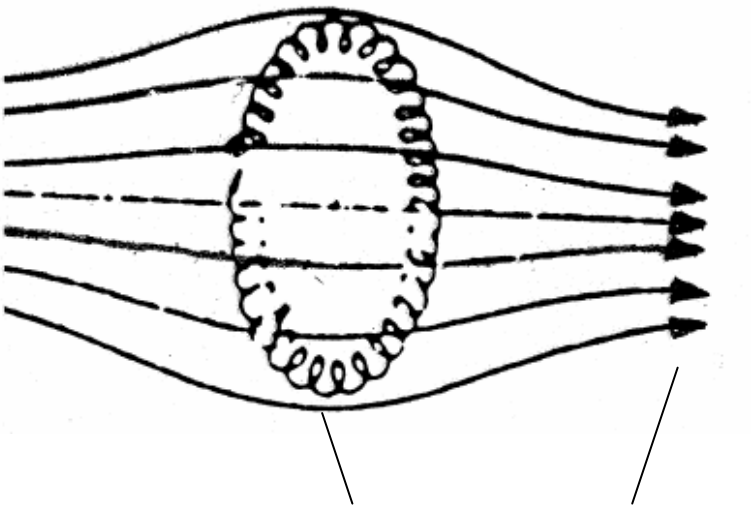


Rotation der Elektronen mit Larmorfrequenz

$\nu_L = 28\ GHz/T \cdot B$



Reflexion am „Flaschenhals“



azimuthaler Drift

Erzeugung schneller Elektronen durch Anregung mit Hochfrequenz auf der Larmorfrequenz ν_L => ECR-Quelle

Das Zyklotron als Speicherring?

grosser Vorteil eines Zyklotrons:

kontinuierlicher Strahl gibt

hohe mittlere Strahlleistung (> 1 MW !)

Nachteil:

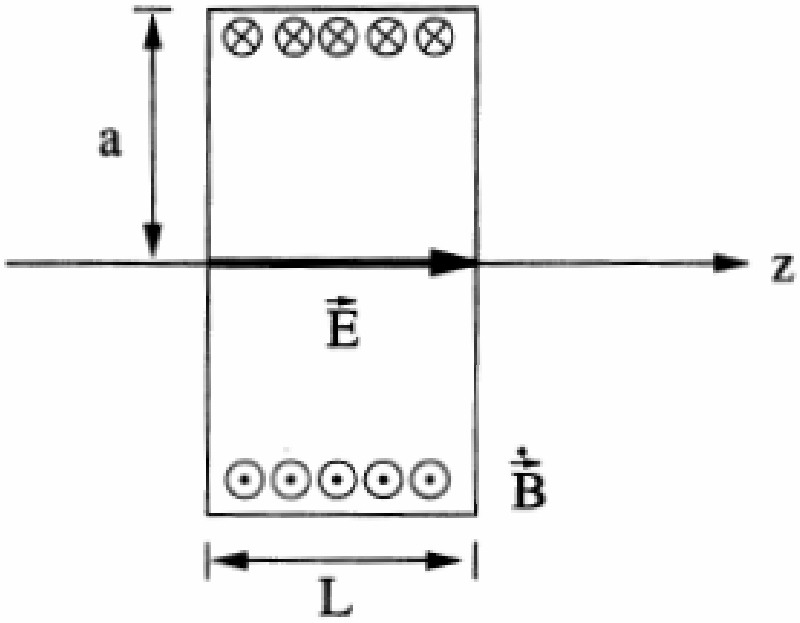
Ideale Neutronenquelle ist gepulst (10-50 Hz)

kann man ein Zyklotron auch als Speicherring konzipieren?

Im Prinzip ja, aber nur für Pulsraten von > 1 kHz !

(Projekt ASTOR , W.Joho 1983)

HF Resonator



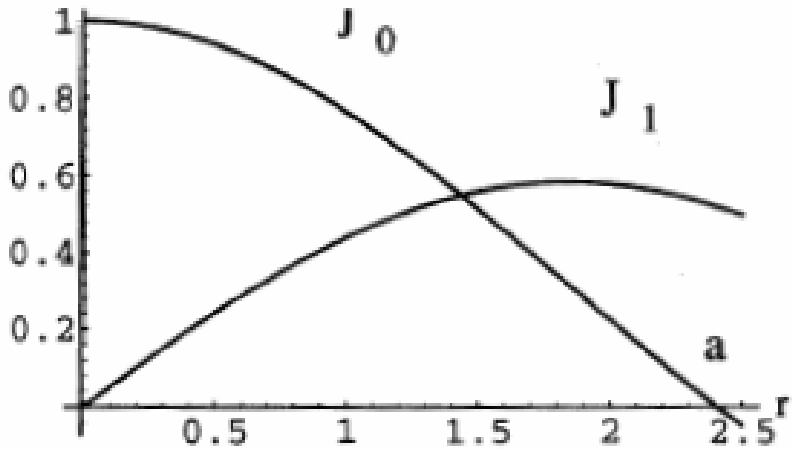


Abb. 3.15. Links: Zylindrischer Hohlraumresonator (Topfkreis) mit der Grundwelle TM_{010} (E_{010}). Das Bild zeigt den Querschnitt. Rechts: Radiale Verteilung des $\boldsymbol{E}$-Feldes (Besselfunktion J_0) und des $\dot{\boldsymbol{B}}$-Feldes (Besselfunktion $J_1 = -J_0'$). Der Radius r und der Maximalradius a sind in Einheiten von k_c^{-1} angegeben

HF-Kavität

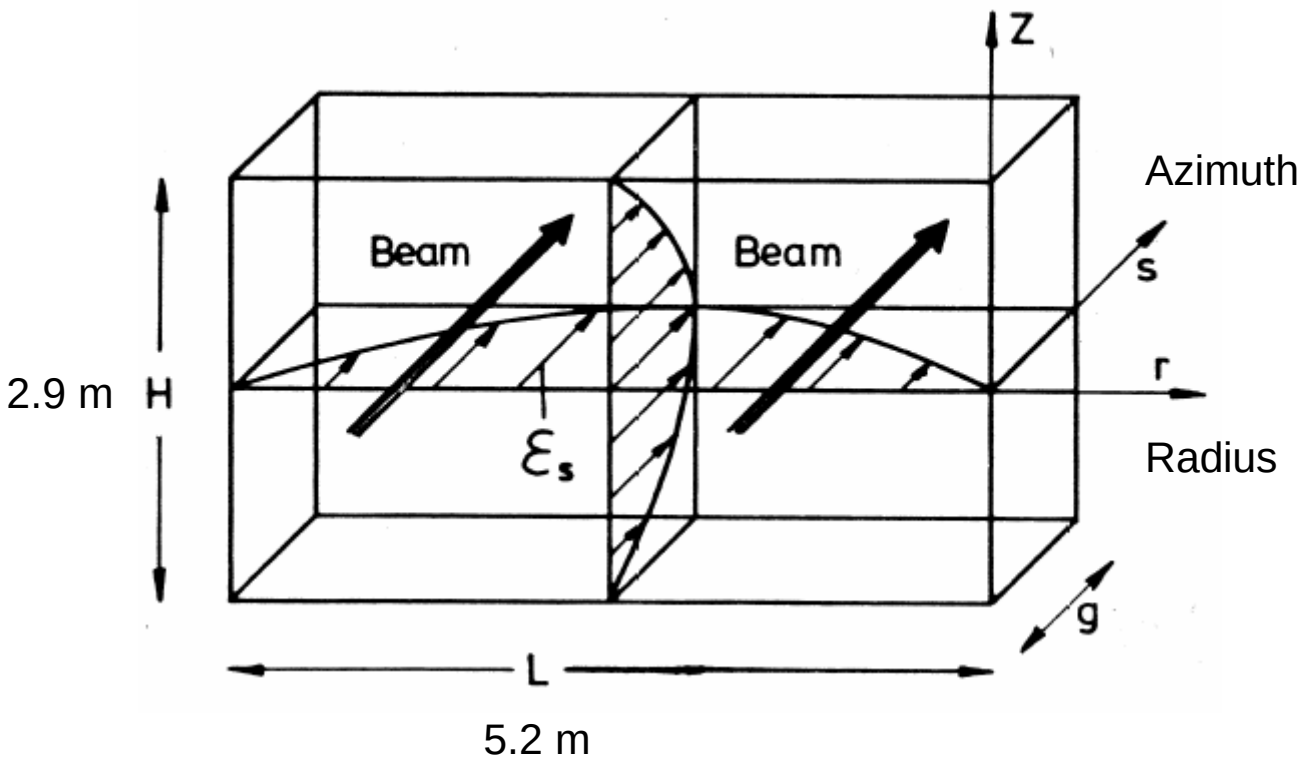
Ringzyklotron 590 MeV , 50.7 MHz

Originalversion:

Aluminium , V=730 kV , 300 kW Verlustleistung

216 Umläufe

bei 2 mA: 300 kW Leistung/Kavität an Strahl

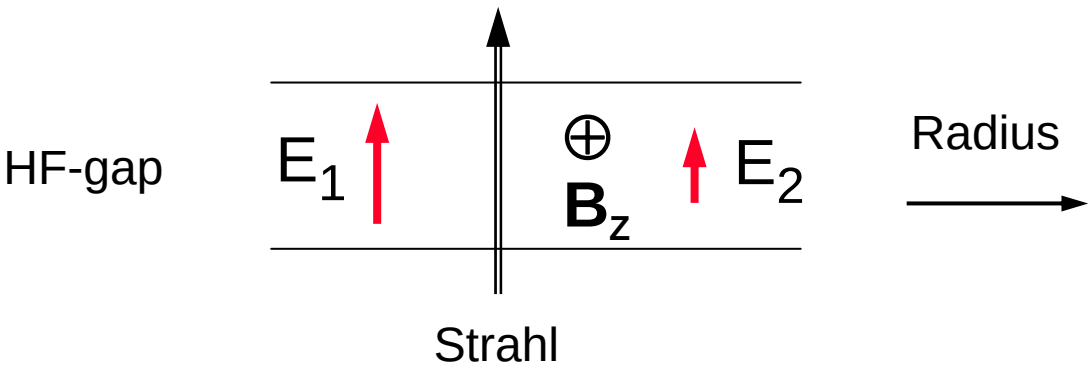


neue Kavität:

Kupfer , V = 1 MV , 500 kW Verlustleistung

160 Umläufe , Stromlimite > 3 mA ?

Einfluss des HF-Magnetfeldes auf die Phase

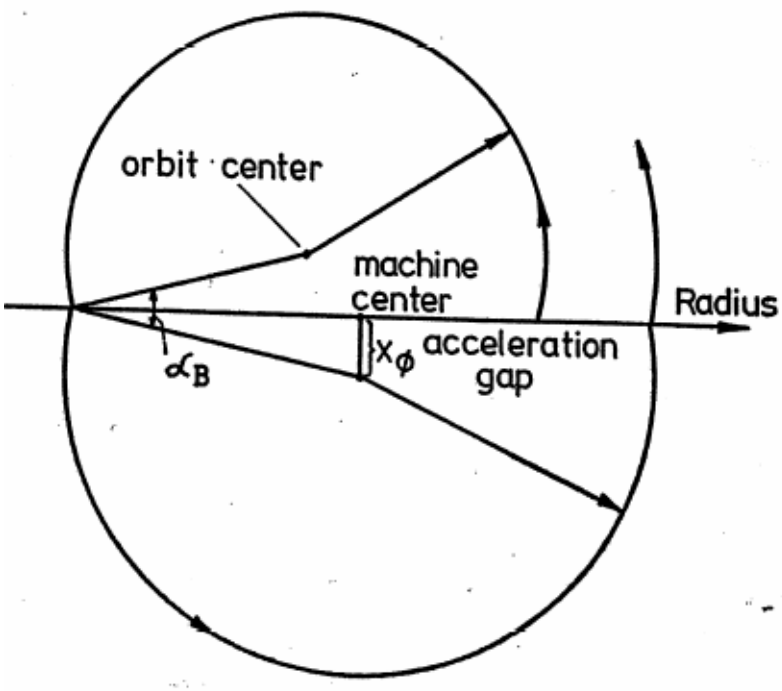


Elektrisches Feld: $E(r,t) = E(r)\cos\Phi\,, \quad \Phi \equiv \omega_{rf}\, t$

Induktionsgesetz von Faraday: $\text{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{d\vec{B}}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_Z = -\frac{1}{\omega_{rf}}\frac{dE}{dr}\sin\Phi}$$

(Magnetfeld der Kavität, erzeugt durch radiale Variation von E)

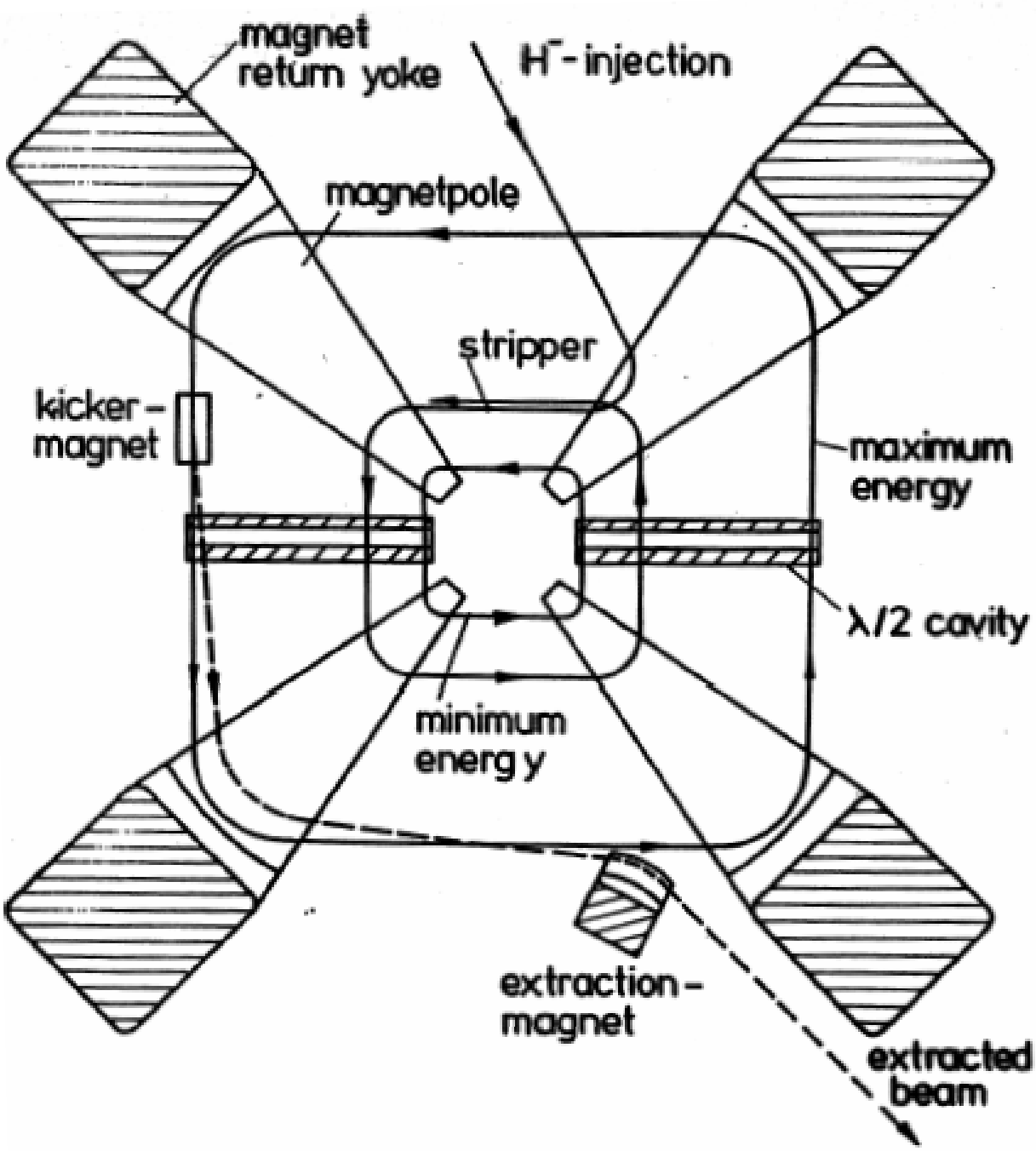


Das Magnetfeld der Kavität gibt den Teilchen einen radialen Kick.

Damit verändert sich die Weglänge.

=> Einfluss auf Phase!

Zyklotron-Speicherring

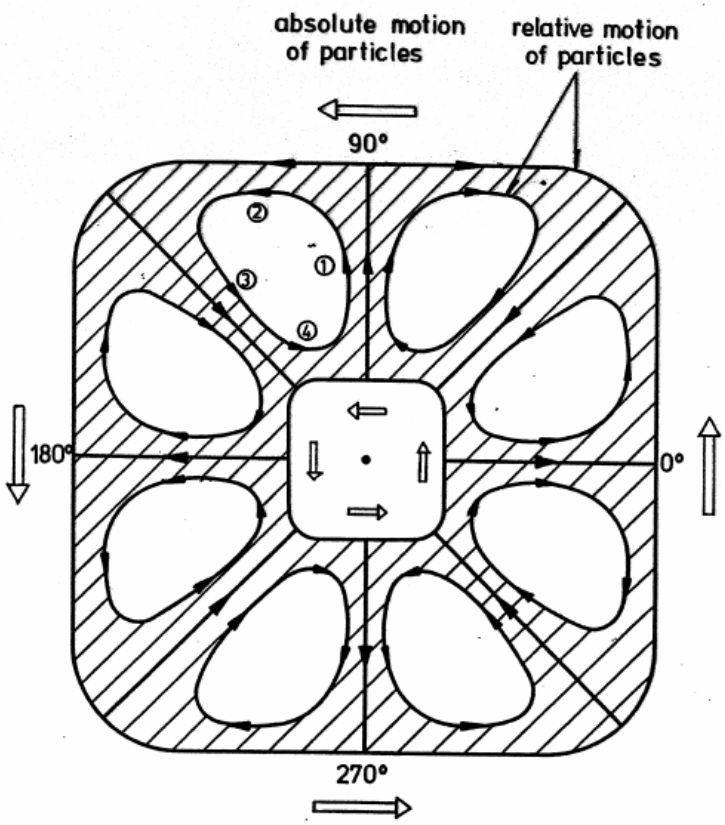


Die Kavitäten haben beim minimalen und maximalen Bahnradius kein elektrisches Feld.

Das HF-Magnetfeld zwingt die Protonen zur Rückkehr und bewirkt eine Pendelung des Strahls zwischen diesen beiden Radien.

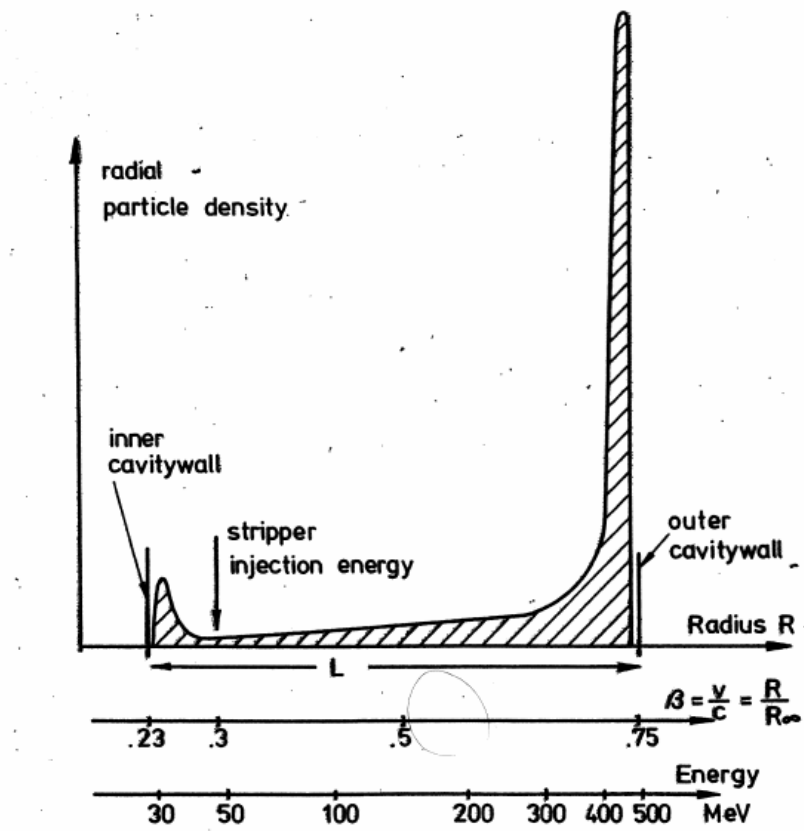
W.Joho Particle Accelerators 1974, Vol.6, p.41-52

Zyklotron-Speicherring



das magnetische Feld der Kavität bewirkt eine radiale Pendelung des Strahls zwischen den 2 Extrem-werten, gegeben durch die Wände der Kavität.

als Beispiel arbeitet das Zyklotron auf der 4.harmonischen



Injektion der H^- - Ionen bei 50 MeV

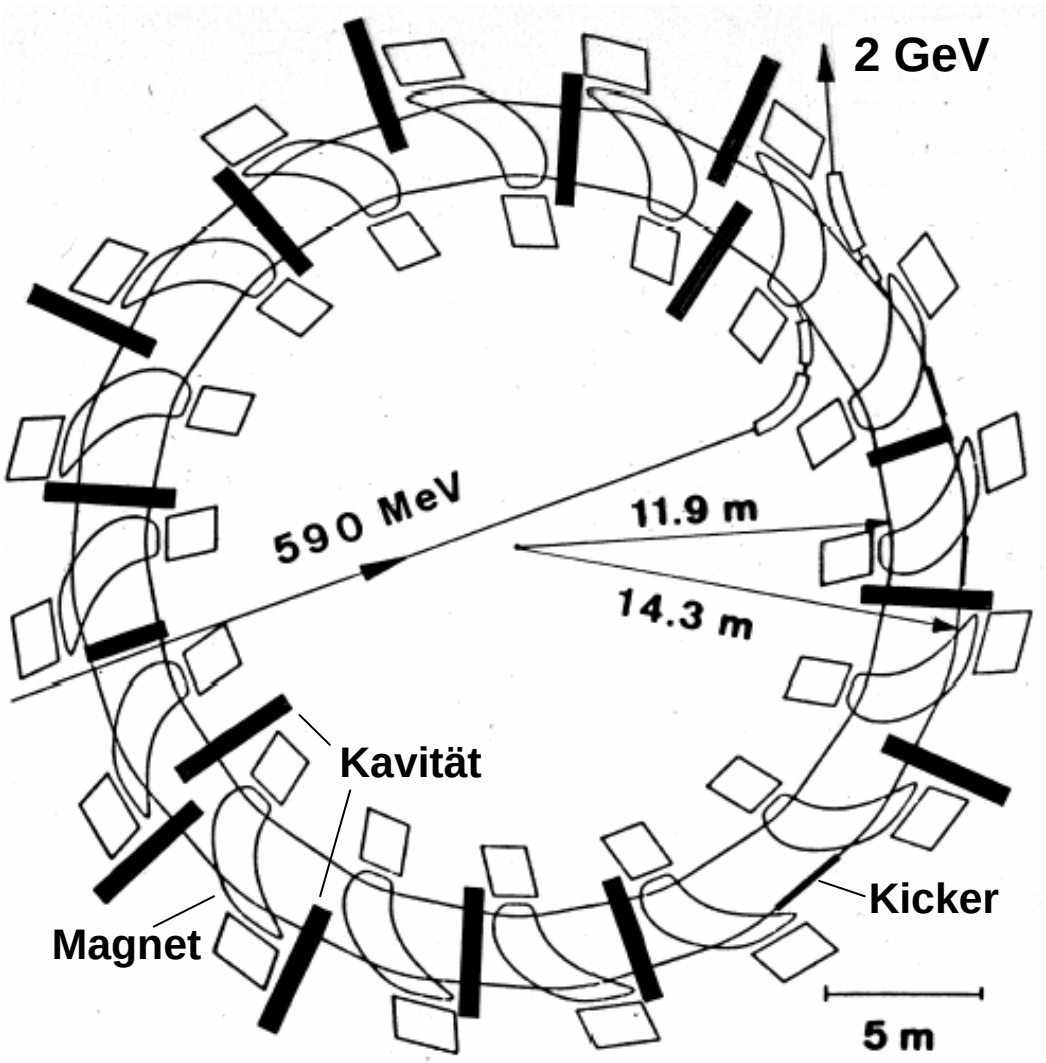
ein grosser Teil des gespeicherten Strahls befindet sich in der Gegend des maximalen Radius bei 450 MeV

W.Joho

Particle Accelerators

1974, Vol.6, p.41-52

Accelerator and Storage Ring
ASTOR



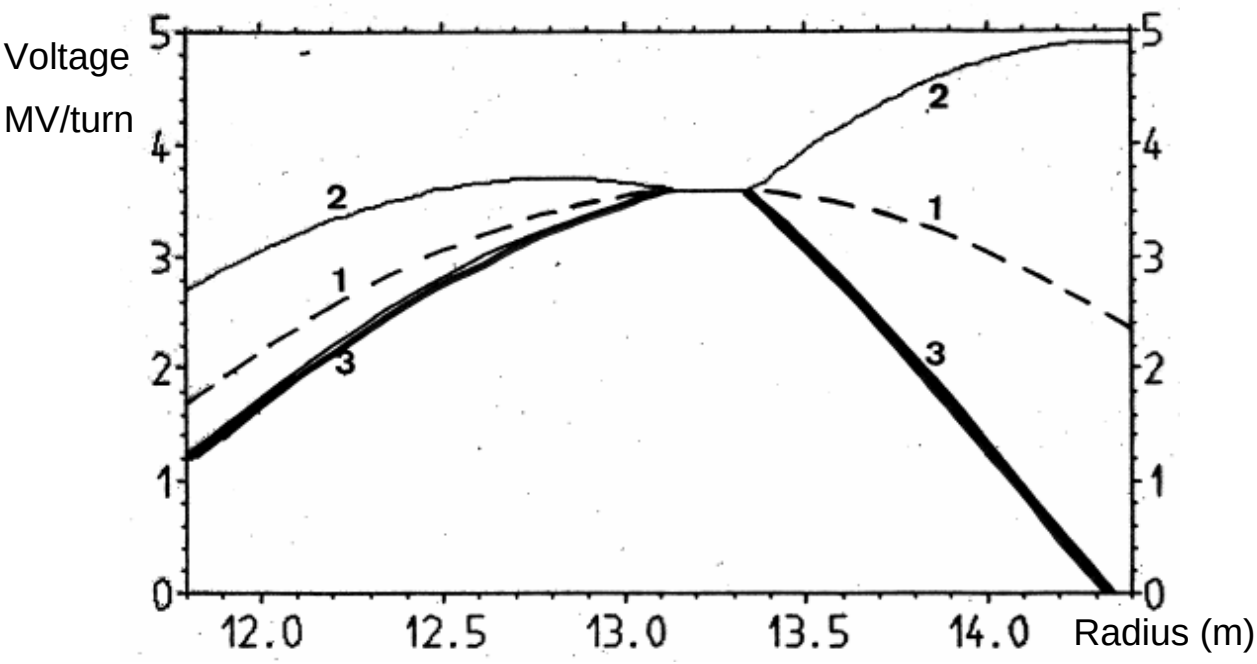
ASTOR ist ein Zyklotron mit spezieller Anodnung der Kavitäten.

Protonen vom 590 MeV Ring Zyklotron werden auf 2 GeV beschleunigt. Dort werden 500 Umläufe gespeichert und dann mit einem Kicker extrahiert.

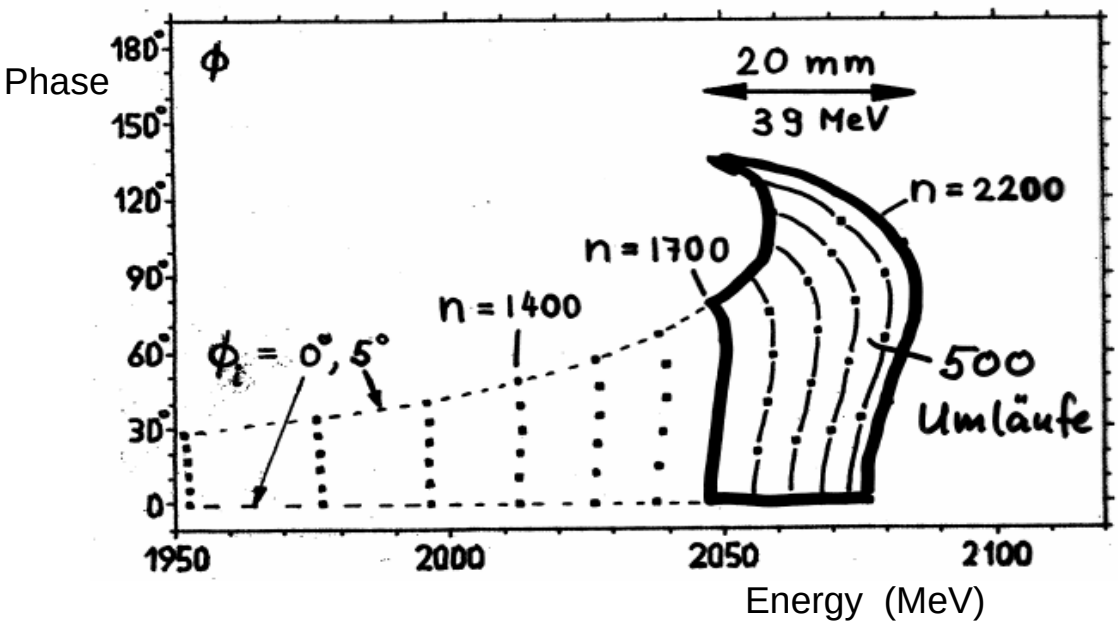
Projekt Vorschlag:

W.Joho US Particle Accelerator Conference 1983 Santa Fe, IEEE NS-30, 2083 (1983)

ASTOR



mit 3 verschiedenen Kavitäten kann man den radialen Verlauf der totalen Spannung variieren.
2=cyclotron mode, 3=storage mode Astor

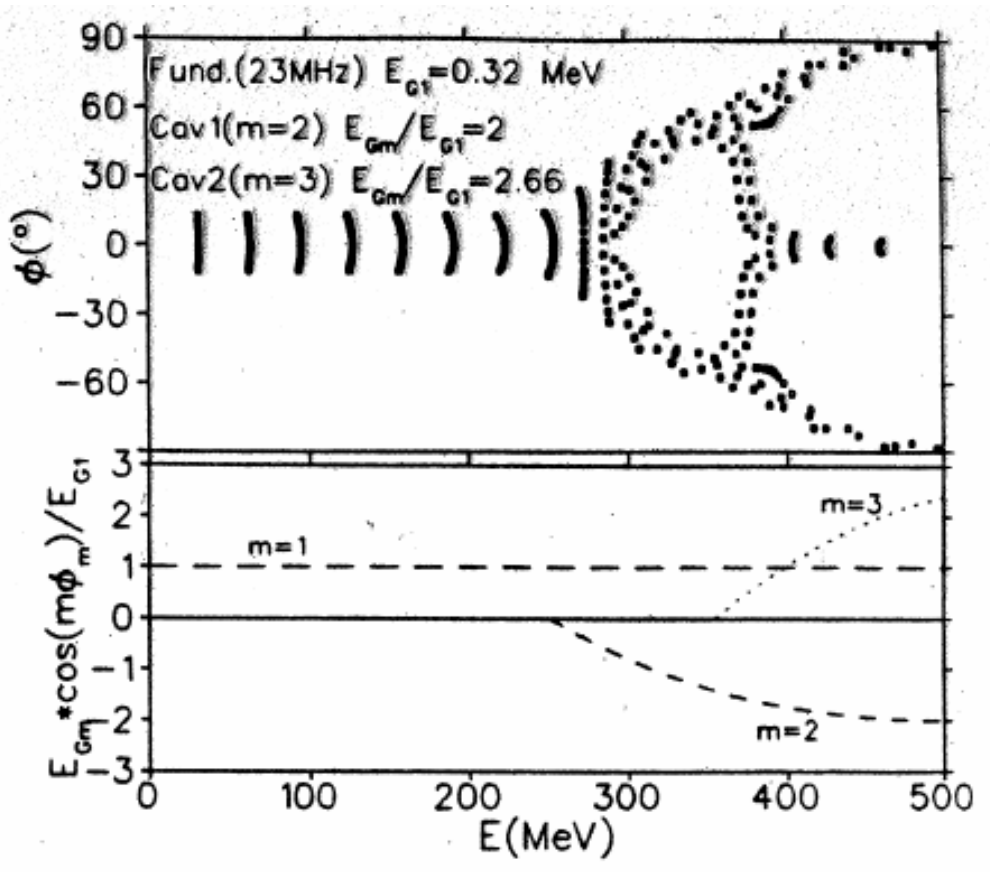


Astor mode:
Akumulation von 500 Umläufen bei der max. Energie

aus 1 mach 3 !

Longitudinale Aufspaltung eines Strahlpakets im Zyklotron

Durch eine Kombination von verschiedenen HF-Kavitäten kann ein Strahl durch die HF-Magnetfelder der Kavitäten in ohne Verluste in mehrere Pakete aufgeteilt werden.

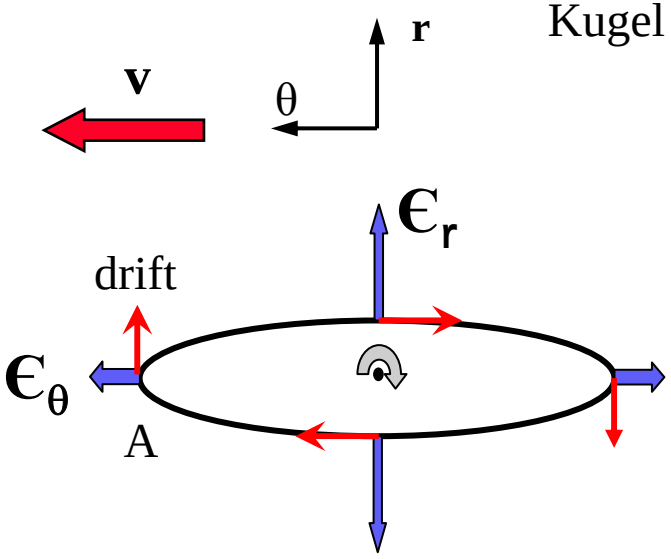


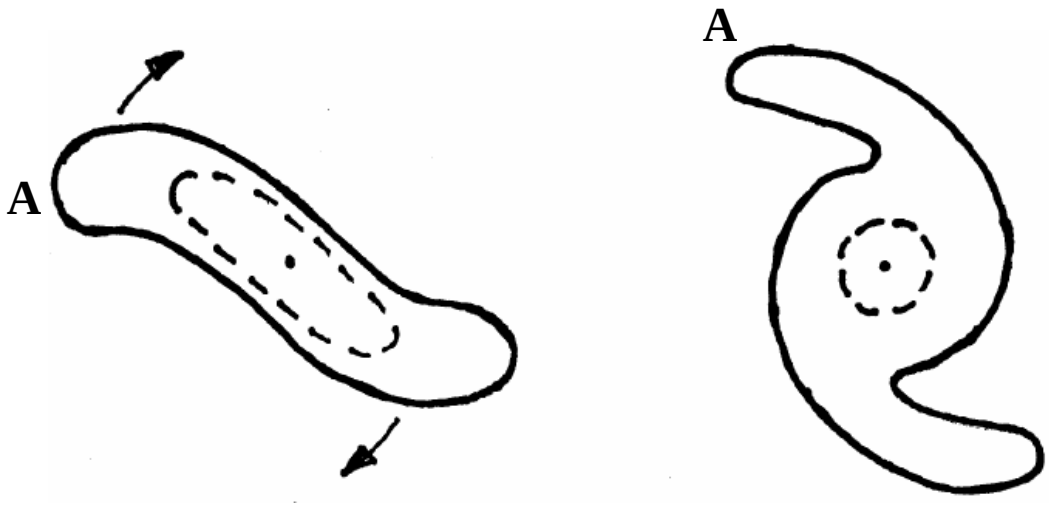
Beispiel für das TRIUMF Zyklotron:
Ein 23 MHz Strahlpaket könnte (ohne Verluste!) in 3 Pakete von 69 MHz umgewandelt werden.

R.E.Laxdal, W.Joho, Longitudinal Splitting of Bunches in a Cyclotron by Superposition of Different RF Harmonics EPAC92 Berlin, p.590

Effekt der Raumladung im Zyklotron

Verformung eines ursprünglich länglichen Bunches in eine Kugel durch Raumladungskräfte, spez. bei tiefen Energien

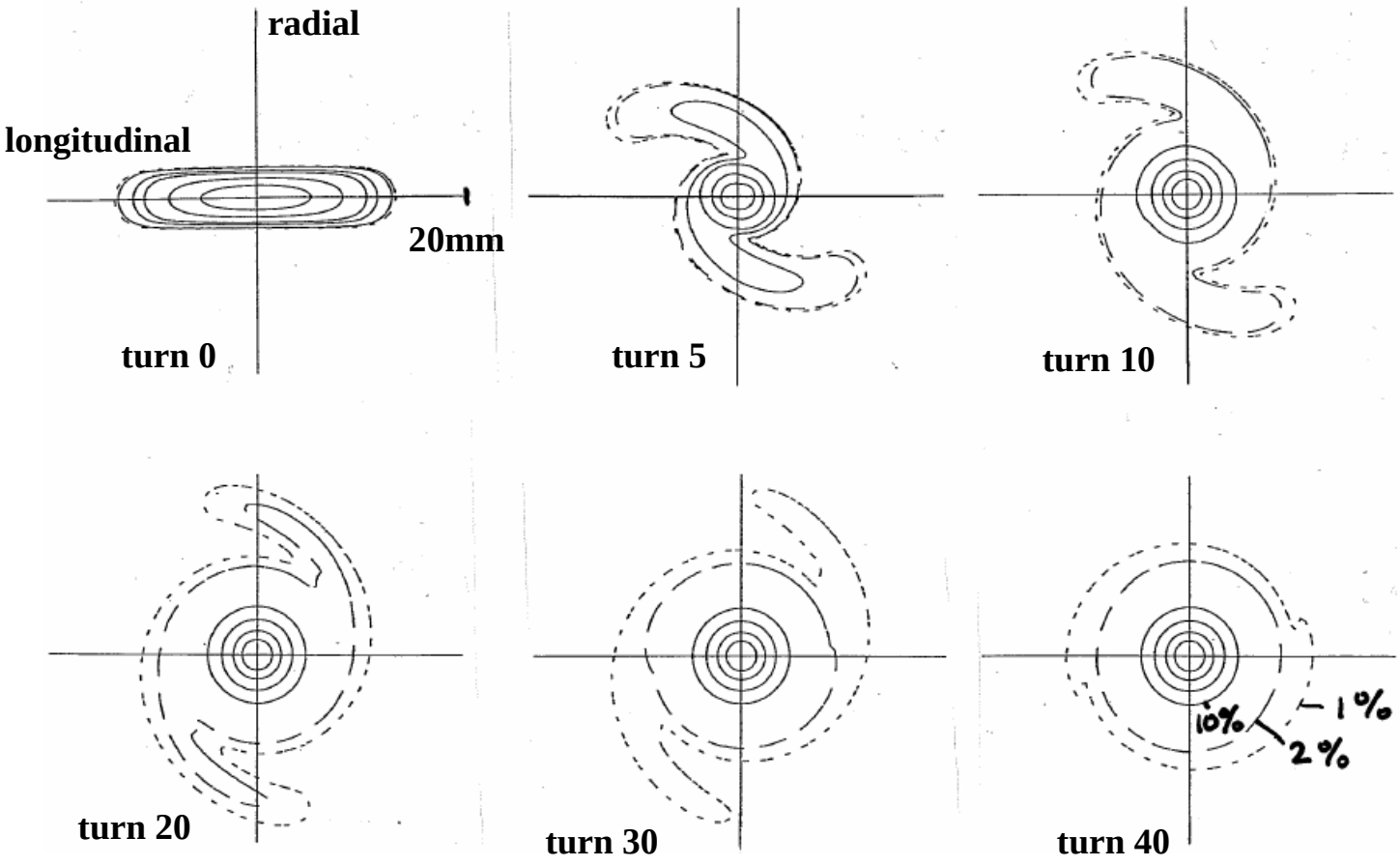




Teilchen A befindet sich am Kopf des Bunches. Durch das longitudinale elektr. Feld der Raumladung erhält es zusätzliche Energie. Wegen der Isochronie-bedingung weicht es aber senkrecht zu einem höherem Radius aus. Wegen den nichtlinearen Raumladungskräften rotieren nicht alle Teilchen im Bunch gleich schnell. Nach wenigen Umläufen bilden sich Spiralarme als sog. „halo‘s“. Der Kern des Bunches formt sich zu einer Kugel.

Raumladung im Zyklotron

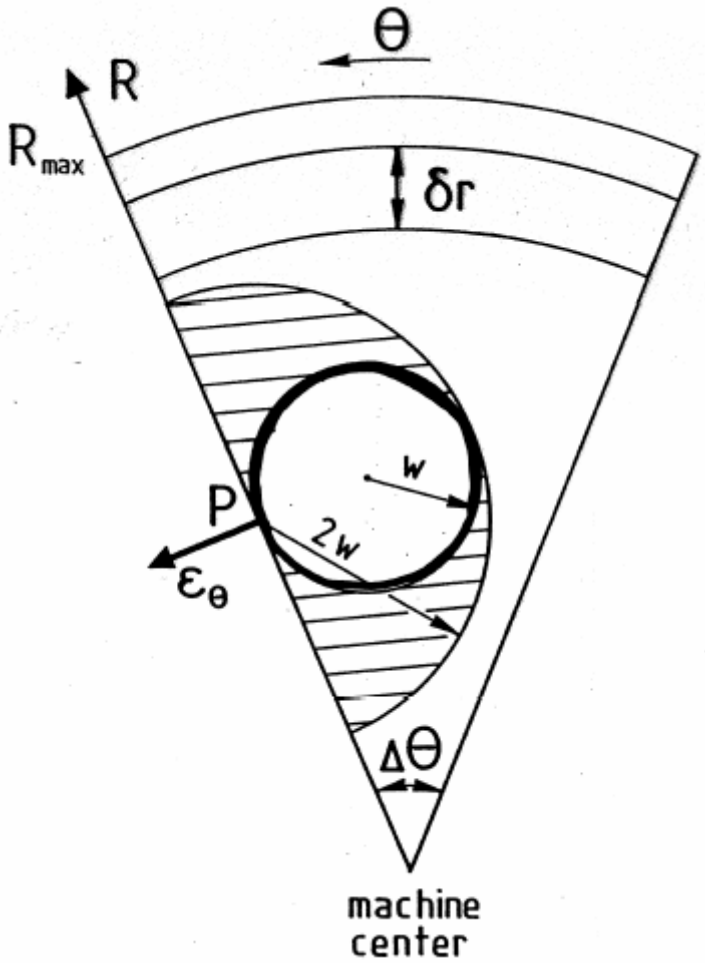
Verformung eines ursprünglich länglichen Bunches in eine Kugel durch Raumladungskräfte



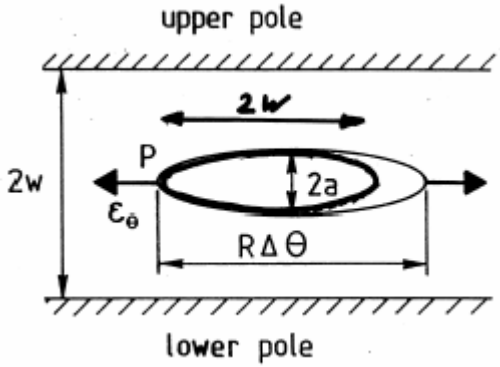
Simulation eines 1mA Strahls, der im Injektor II bei 3 MeV 40 Umläufe ohne Beschleunigung vollführt. Der Kern stabilisiert sich schneller als das „halo“.

(Berechnungen durch Stefan Adam)

Raumladungsfelder im Zyklotron



top view



side view

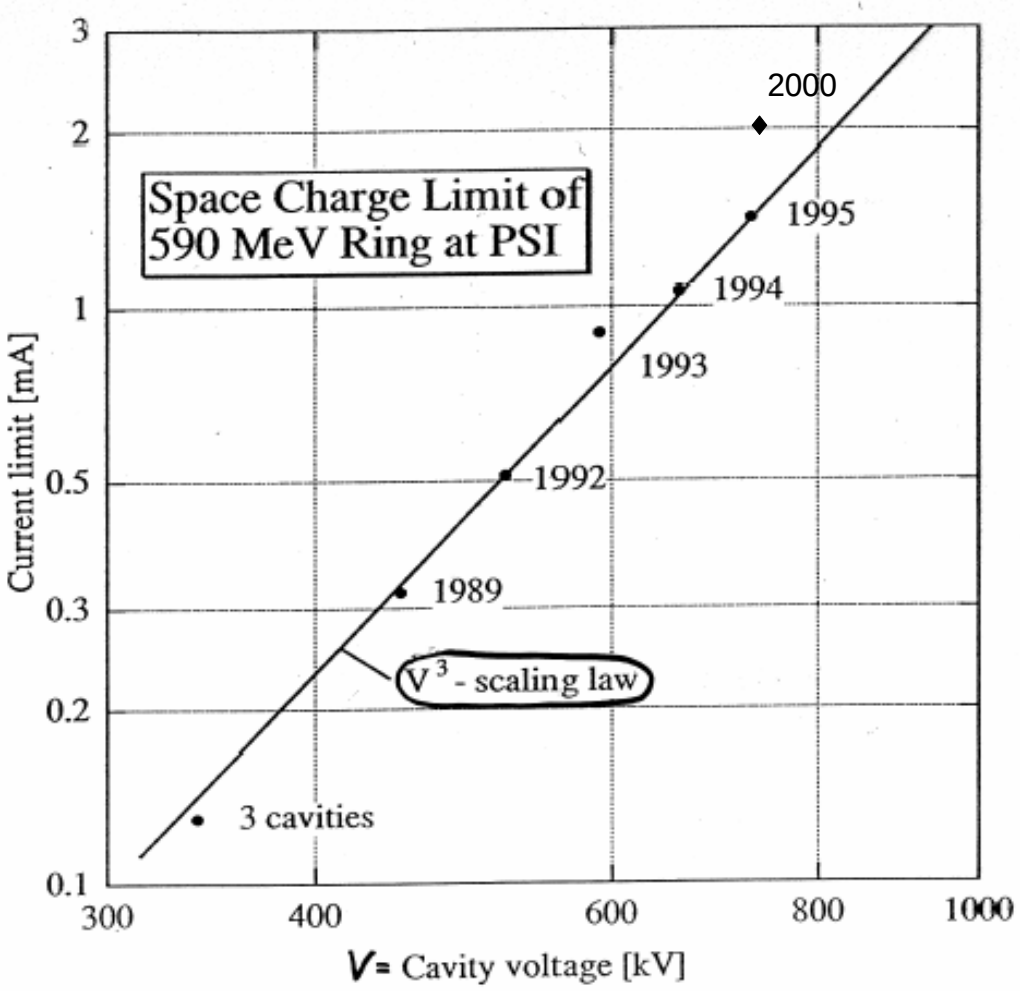
Disc-Modell (W.Joho 1981)

zirkulierende Protonen füllen ein „Kuchenstück“ mit azimuthaler Ausdehnung Δθ. Benachbarte Bahnen werden als radial überlappend angenommen.

Das azimuthale elektrische Feld am Rande des „Kuchenstücks“ beim Punkt P wird approximiert durch das Feld einer Diskus-scheibe, da die Ladung von Protonen ausserhalb des Halbkreises um P durch den oberen und unteren Pol abgeschirmt werden. Protonen im schraffierten Gebiet geben einen kleinen Beitrag zum azimuthalen Feld ϵ_θ. Durch das Feld ϵ_θ gewinnt das Proton eine zusätzliche Energie pro Umlauf von:
$dE/dn = 2\pi R\, \epsilon_\theta$

Dieses Modell erlaubte die Voraussage, dass die **Stromlimite** durch Raumladung mit $\mathbf{V^3}$ zunimmt (V=Kavitätsspannung)

Stromlimite im Ringzyklotron



Die longitudinalen Raumladungsfelder bewirken eine Vergrösserung der Energie-unschärfe und limitieren durch eine Zunahme der Verluste bei der Extraktion den maximalen Strom.

Durch Erhöhung der Kavitätsspannung V verringert sich die Umlaufszahl n im Zyklotron ($V \cdot n$ = konst.)

Die Stromlimite ist proportional zu V^3 !

3 Effekte steuern je einen Faktor V (~1/n) bei:

1) Ladungsdichte ~ n

2) totaler Strahlweg im Zyklotron ~ n

3) Bahnseparierung ~ V

W.Joho, 9th Int. Cyclotron conference CAEN (1981)

keine Angst vor Einstein!

vor Einstein :

kin. Energie : $E = \frac{m}{2} v^2$, Impuls : $p = m\,v$

Einstein : jede Masse hat eine Ruhe - energie : $E_0 = m\,c^2$

Elektron : $E_0 = 0.511\,\mathrm{MeV}$

Proton : $E_0 = 938\,\mathrm{MeV}$ $(= 1836\,E_0(\mathrm{Elektron}))$

totale Energie : $E_{tot} = \gamma E_0$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{[1-(v/c)^2]}}$

aequivalent : $p = \gamma m v$

$E_{tot}^2 = E_0^2 + (pc)^2$ ("Pythagoras" => Einstein Dreieck)

Kontrolle für kleine Geschwindigkeit :

$E_{tot} \approx E_0 + \frac{m}{2} v^2$

Einstein Dreieck

Vereinfachung der Einstein Formeln mit dimensionslosen Werten

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \qquad (0 \le \beta \le 1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

$$\tilde{p} \equiv \beta\,\gamma$$

Geschwindigkeit : $v = \beta\, c$

Ruhe - Energie : $E_0 = m\, c^2$

totale Energie : $E_{tot} = \gamma\, E_0$

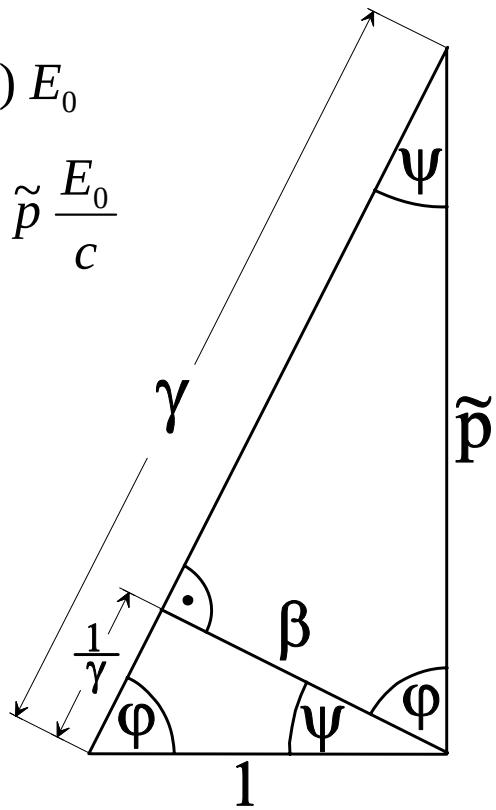
kin. Energie : $E_{kin} = (\gamma - 1)\, E_0$

Impuls : $p = \gamma\, m\, v = \tilde{p}\, \frac{E_0}{c}$

Einstein Dreieck:

$$\gamma^2 = 1 + \tilde{p}^2$$

$$\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 = 1$$



relativistische Formeln: Trick mit Taschenrechner: trigonometrische Funktionen !

$$\beta \equiv \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)}}$$

$$taufe \quad \beta \equiv \sin\varphi, \quad dann \quad \gamma = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\beta\gamma \equiv \tan\varphi$$

---

für sehr hohe Energien $(\beta \approx 1)$:

$$\beta \equiv \cos\varphi, \qquad (\beta \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2)$$

$$dann \quad \gamma = \frac{1}{\sin\varphi}, \qquad (\gamma \approx \frac{1}{\varphi})$$

$$\beta\gamma \equiv \frac{1}{\tan\varphi}, \quad (\approx \gamma)$$

Wettrennen mit dem Licht

Das COMET Zyklotron erzeugt Protonen mit einer Energie von 240 MeV für Strahlentherapie.

Wie schnell fliegen diese Protonen?

$$\gamma = 1 + \frac{E_{kin}}{E_0} = 1 + \frac{240\ MeV}{938\ MeV} = 1.26$$

$$\cos\varphi \equiv \frac{1}{\gamma} = 0.8\,, \quad \Rightarrow \varphi = 37^0$$

$$\beta \equiv \sin\varphi = 0.6\,, \quad \text{d.h.}$$ 60% der Lichtgeschwindigkeit

$$(\tilde{p} = \beta\,\gamma = \tan\varphi = 0.75\,, \quad B\rho = \tilde{p}\,\frac{(E_0/e)}{c} = 2.35\,Tm)$$

In der SLS fliegen Elektronen beinahe so schnell wie das Licht. Um wieviel würden sie ein Rennen zum Mond gegen das Licht verlieren?

$$\gamma \approx \frac{E_{kin}}{E_0} = \frac{2'400\ MeV}{0.5\ MeV} = 4'800$$

$$\frac{1}{\gamma} \equiv \sin\psi \approx \psi$$

$$\beta \equiv \cos\psi \approx 1 - \tfrac{1}{2}\psi^2, \quad 1 - \beta \approx \frac{1}{2\,\gamma^2} = 2.2 \times 10^{-8}$$

Rückstand des Elektrons am Mond (nach L=384‘000 km:)

dL = (1-β)L = 8 m !